

НОУ СОШ «Таланъ»

Тема

Самоподобные фигуры и мозаики.

Выполнил ученик 8 класса

Адаменко Виктор

Руководитель Воробьева В.Д.

Новосибирск 2012 г.

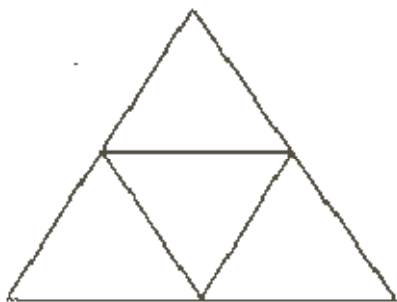
Содержание	Страница
Введение	2
Определение самоподобных фигур	2
Примеры самоподобных фигур	3-4
Самоподобные фигуры и мозаики	5-6
Свойства строго иерархических мозаик	7-8
Заключение	9

В курсе 8 класса мы изучали подобие фигур, подробнее рассматривали тему “Подобие треугольников”, “Признаки подобия треугольников” и применяли изученный материал при решении задач. Мне понравилась тема подобие, я заинтересовался этой темой и был удивлен что кроме подобных фигур существуют и самоподобные фигуры. Я решил изучить эту тему самостоятельно.

Цель работы: изучить тему “Самоподобные фигуры” использовать при решении задач, познакомить с изученным материалом одноклассников, выступить на НПК.

Самоподобные фигуры.

Треугольник разбивается средними линиями на четыре равных между собой треугольника. Каждый из них подобен исходному. В этом смысле треугольник является самоподобной фигурой.



Фигуру F называют самоподобной, если её можно разрезать на несколько фигур $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$, каждая из которых подобна исходной.

Так как каждое слагаемое F_i подобно фигуре f , то имеется преобразование подобия h_i , которое переводит фигуру f в фигуру F_i : $h_i(f) = F_i$. Коэффициенты K_i , $i=1, \dots, m$, этих преобразований подобия не обязательно равны между собой, но все меньше единицы.

Преобразование подобия.

Преобразованием подобия называется такое преобразование h плоскости (или пространства), при котором расстояние $d(x, y)$ между любыми двумя точками x и y изменяется в некоторое, одно и то же, число k раз: $d(x, y) = k \cdot d(h(x), h(y))$, $k > 0$

В частном случае когда $k=1$ преобразование подобия называется движением. Некоторые из движений например параллельный перенос на ненулевой вектор перемещают каждую точку в некоторую другую точку. Другие, поворот g плоскости вокруг точки O на некоторый угол, оставляет точку O на месте про такую точку O , что $g(O)=O$, говорят, что она является неподвижной точкой преобразования g . таким образом поворот вокруг точки имеет единственную неподвижную точку. Третий тип движений- отражение(симметрия) относительно некоторой прямой L - имеет бесконечно много неподвижных точек, которые составляют прямую L . итак одни движения могут не иметь неподвижных точек, другие могут иметь одну или бесконечно много неподвижных точек.

Положение меняется когда мы имеем дело с подобием h , не являющимся движением, а именно: когда коэффициент $k(> 0)$ подобия p не равен 1. Тогда преобразования h имеют неподвижную точку и при том единственную.

Благодаря замечательной теореме о неподвижной точке всякое преобразование подобия плоскости с коэффициентом k не равное 1 имеет единственную неподвижную точку, скажем точку, O . Поэтому преобразование подобия можно представить как гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k с последующим поворотом вокруг O на некоторый угол или отражением относительно некоторой прямой, проходящей через O . В частности, такое преобразование может быть чистой гомотетией, т.е. может не содержать никакой поворотной составляющей.

Примеры самоподобных фигур.

Треугольник

Итак, произвольный треугольник разбирается средними линиями на четыре подобных ему треугольника. Рассмотрим те преобразования подобия, которые переводят исходный треугольник ABC в ему подобные части. Первые три это гомотетии с центрами в вершинах A1, A2, A3 и коэффициентом $-1/2$, и четвертое это гомотетия с центром в точке пересечения медиан треугольника A1A2A3 и коэффициентом $1/2$. Последнее преобразование можно представить иначе: как гомотетию в точке пересечения медиан с положительным коэффициентом $1/2$ с последующим поворотом вокруг той же точки на 180° .

Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование, при котором

$$X' \quad \overrightarrow{OX'} = k \overrightarrow{OX}.$$

каждой точке X ставится в соответствие точка так, что

Прямоугольный треугольник

Если треугольник прямоугольный, то он допускает, как известно, и другое разбиение на два подобных треугольника.

Рассмотрим преобразование подобия g_1 , которое есть произведение гомотетии h_1 с неподвижным центром в вершине A и с коэффициентом $k_1 = ab/ac$ и отражения относительно биссектрисы угла ABC. Ясно, что $g_1(abc) = adb$

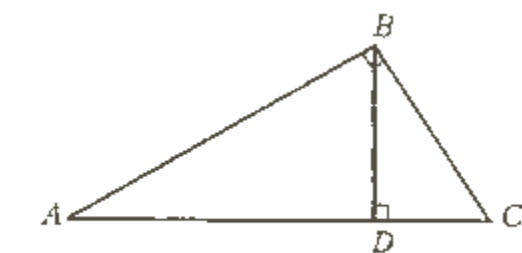


Рис. 2

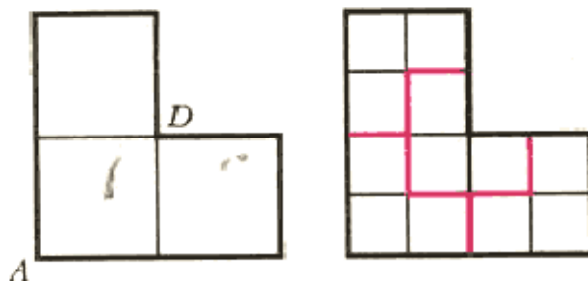
Домино

Фигура «домино» состоит из двух равных квадратов и может быть опять разрезана на 4 подобных копии.



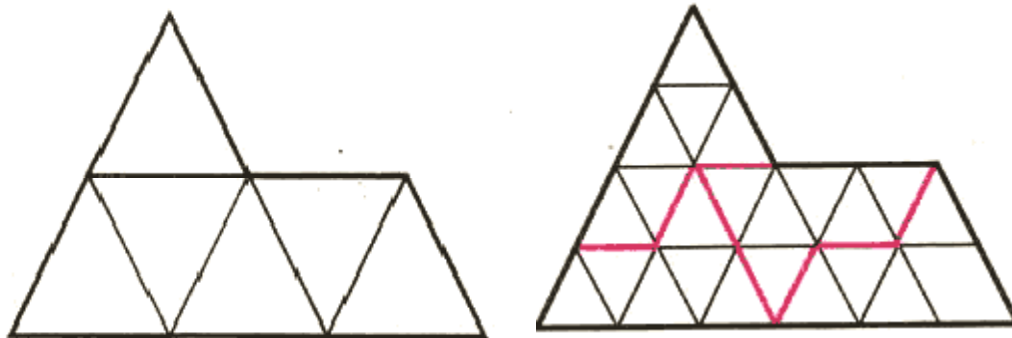
Стул

Фигура «стул» (триомино) составляется из трех равных квадратов и может быть разрезана на 4 подобных копии F_1, F_2, F_3 и F_4 . Пусть h_1, h_2, h_3, h_4 – преобразования подобия, которые переводят «большой» стул в соответствующие части. Ясно, что все они имеют коэффициент $1/2$. При этом h_1 и h_2 являются, очевидно, гомотетиями с центрами в точках A и D соответственно.



«Сфинкс»

«Сфинкс» (гексамино) составляется из 6 правильных треугольников и может быть разбит на 4 подобные копии.

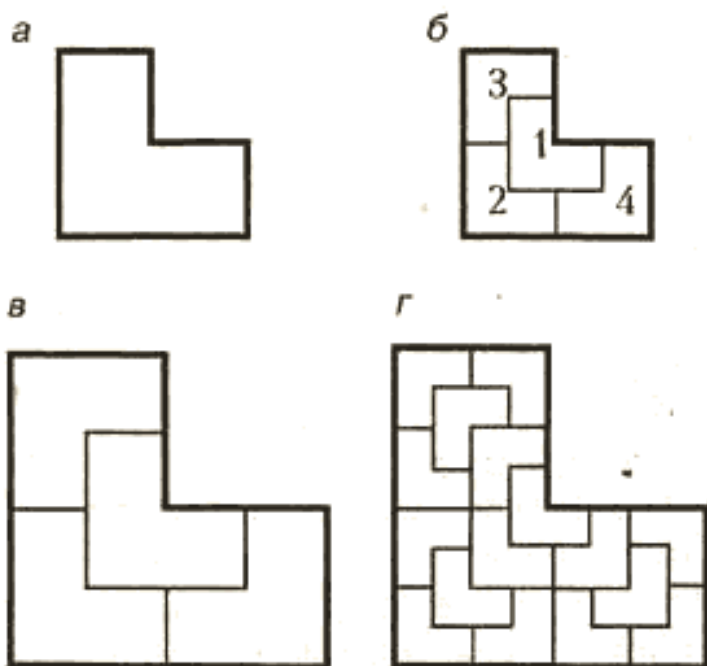


Самоподобные фигуры и мозаики

Широкое применение самоподобные фигуры нашли в мозаиках. Рассмотрим на плоскости какую-нибудь «хорошую» самоподобную фигуру F без дыр, такую как, например, треугольник или параллелограмм или ещё какой-нибудь самоподобный многоугольник, который допускает разбиение на подобные ему и в то же время попарно равные между собой фигуры. Тогда копиями фигуры F можно замостить всю плоскость без пропусков и перекрытий. Замощение всей плоскости плитками без перекрытий называются мозаикой. Если все плитки в мозаике попарно равны, то мозаика называется моноэдральной.

Как получить моноэдральную мозаику, исходя из самоподобной фигуры F ? Имеется несколько путей.

1 Возьмем, например «стул» F определенного размера и разобьем его на четыре «стульчика», каждый вдвое меньшего размера. Увеличим эту картинку вдвое так, чтобы каждый «стульчик» вырос до размеров оригинала. Затем разрежем каждый из четырёх «стульев» опять на четыре «стульчика» и опять получившиеся увеличим вдвое. Повторяя эту процедуру опять и опять, мы получаем неограниченно расширяющиеся Г-образную область, состоящую из равных «стульев».



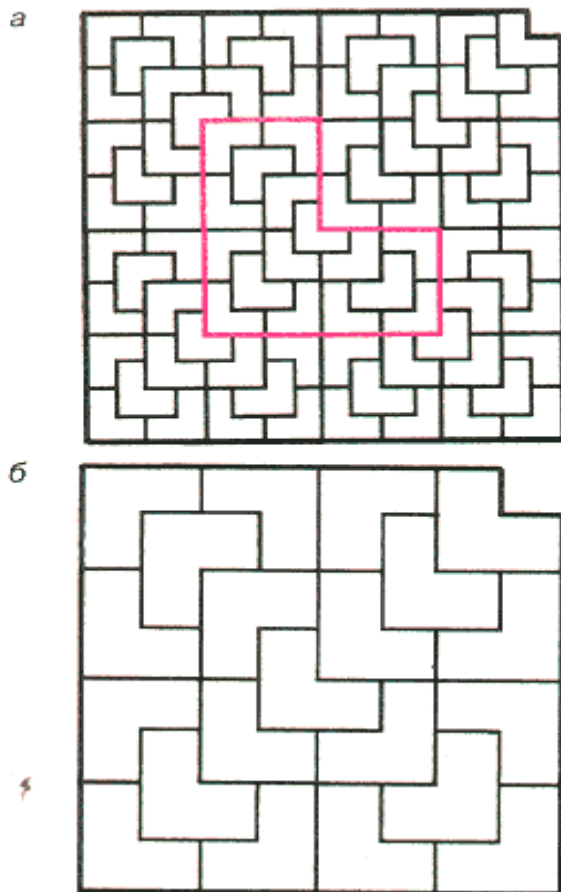
Эта процедура имеет странное название: «дефляция – инфляция». Знакомое всем нам слово «инфляция» соответствует этапу укрупнения плиток, а менее привычное «дефляция» – подразбиению укрупненных на предыдущем этапе плиток на более мелкие плитки. «в пределе», как часто говорят, этот процесс приводит к моноэдральной мозаике. Но как раз «переход к пределу» и содержит упомянутый выше каверзный момент. Собственно, о каком «пределе» здесь идет речь? Очевидно, что в результате дидпроцесса мы получаем возрастающую по размерам последовательность кусков плоскости, уложенных плитками. Однако эта последовательность не есть

последовательность фрагментов, вырастающих следующий из предыдущего по мере того, как мы добавляем к уже уложенной мозаике новые и новые плитки. Тем не менее можно доказать, что самоподобным многоугольником всегда можно замостить плоскость.

Мозаика, полученная посредством самоподобной фигуры F , называется **самоподобной**, если

- плитки этой мозаики (будем говорить, что это – плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня, причем так, что плитки 2-го уровня опять составляют мозаику; (рис. А)

- такое последовательное укрупнение возможно для любого k -го уровня. (рис Б)



В силу этого самоподобные мозаики называют также иерархическими, понимая под этим иерархию, которая существует между плитками предыдущего и последующего уровней. Однако иерархия может быть как «строгой», так и «слабой». При «*строгой*» иерархии мозаика каждого следующего уровня komponуется из плиток мозаики предыдущего уровня *единственным* способом. При «слабой» иерархии плитки мозаики могут объединяться в плитки мозаики следующего уровня *несколькими разными* способами.

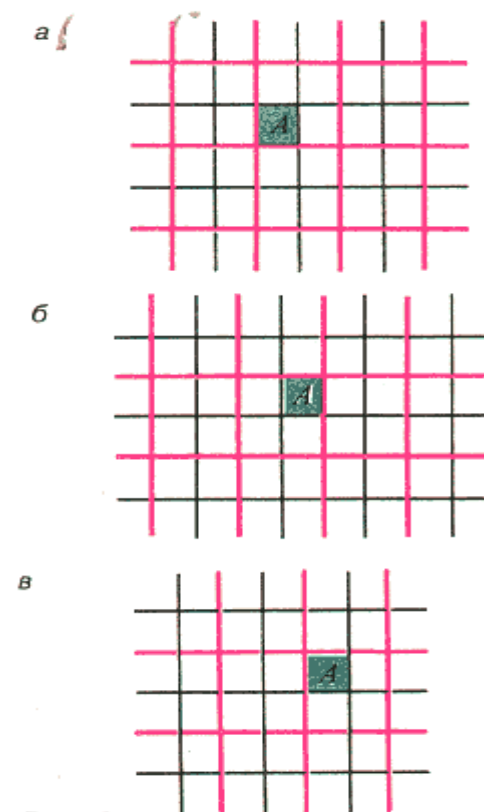
Строгий или слабый характер иерархии во многом определяется самой фигурой F. Так квадрат определяет слабую иерархию. Действительно, мозаика из квадратов может быть укрупнена в мозаику 2-го уровня, так что данный квадрат А-1-го уровня может входить в плитки мозаики 2-го уровня различными способами.

А вот стул, сфинкс, домино, определяют строгую иерархию. Возьмем какую-либо плитку стул соответствующей мозаике. Он вместе с тремя другими стульями объединяется в стул 2-го уровня, причём каждая плитка 1-го определяет тройку дополнительных плиток однозначно.

Тем самым укрупненная мозаика 2-го уровня определяется однозначно. Так как мозаика 2-го уровня обладает тем же свойством, то самоподобное разбиение плоскости на стулья – строго иерархическое.

Свойства строго иерархических мозаик.

Строго иерархические мозаики обладают рядом удивительных свойств, отличающих их от слабо иерархических.



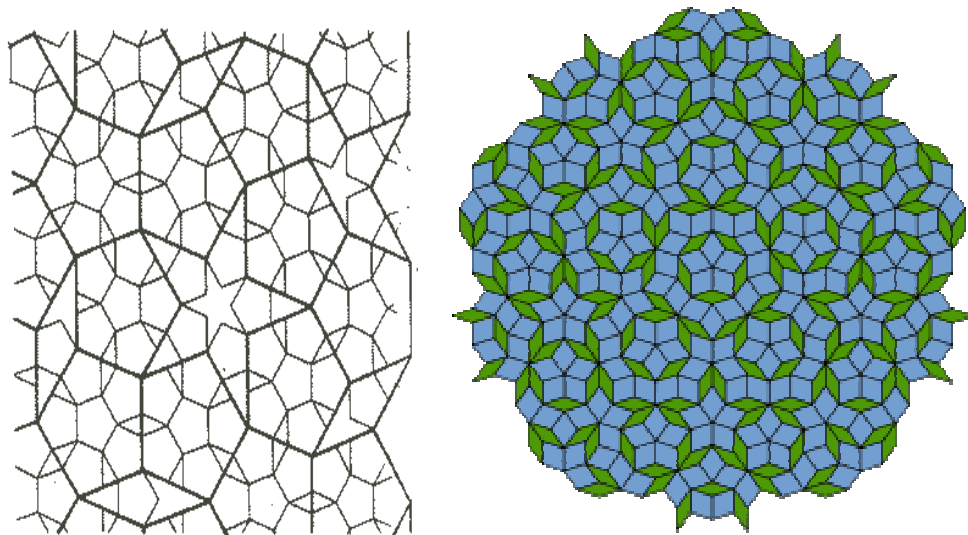
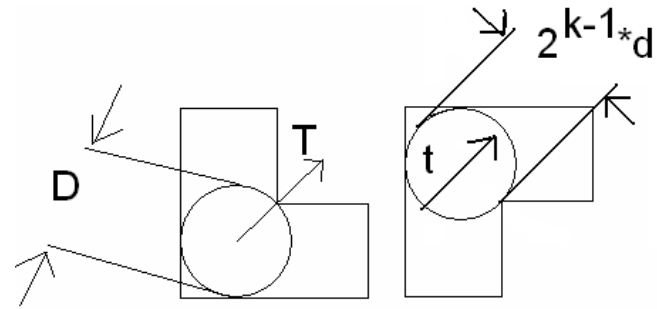
Непериодичность

Мозаика, для которой можно указать хотя бы один параллельный перенос, перемещающий её в себя, называется *периодической*.

Слабо иерархические мозаики, как это видно на примере квадратной мозаики, могут быть периодическими. Так, любая плитка квадратной мозаики может быть перенесена в любую другую плитку вместе со всей мозаикой.

Важнейшее отличие строго иерархических мозаик – в том, что все они **непериодичны**. Причина непериодичности строго иерархических мозаик проста. Действительно, предположим, что существует параллельный перенос t , который передвигает всю строго иерархическую мозаику в себя. Ясно, что перенос t перемещает каждую плитку f_1 мозаики в какую-то другую плитку f_2 . В силу однозначной определённости следующей мозаики из плиток 2-го уровня параллельный перенос t перемещает в себя также мозаику 2-го уровня и, вообще, мозаику любого k уровня. Опять, в силу того, что плитки мозаики 2-го уровня однозначно составляются в плитки мозаики 3-го уровня, параллельный перенос t , перемещающий в себя мозаику 2-го уровня, перемещает в себя мозаику 3-го уровня, и, вообще мозаику любого уровня k .

Плитка k -го уровня в 2^{k-1} раз больше плитки 1-го уровня. Поэтому, если в плитку 1-го уровня можно поместить круг диаметром d , то в плитку k -го уровня можно поместить круг диаметром $2^{k-1}d$. При достаточно большом значении k диаметр $2^{k-1}d$ превзойдет длину вектора переноса t . Это означает, что перенос на вектор t переводит круг радиуса $2^{k-1}d$ в круг такого же радиуса, перекрывающийся с первым. С другой стороны, эти круги должны принадлежать *разным* плиткам k -уровня и поэтому круги не могут пересекаться. Никакая *ограниченная* фигура при параллельном переносе не может переходить в себя. А так как различные плитки мозаики k -уровня не перекрываются друг с другом, то тем более не перекрываются и содержащиеся в них круги. Пришли к противоречию.



Узоры Пенроуза

Итак, все строго иерархические мозаики непериодичны. В то время как периодические мозаики являются удобной моделью для кристаллов, строго иерархические мозаики играют важную роль в изучении квазикристаллических структур, которые были недавно обнаружены в природе. В отличие от кристаллических структур, эти структуры непериодичны. В частности, знаменитые узоры Пенроуза, являющиеся наиболее известной геометрической моделью квазикристалла, представляют собой прямое обобщение строго иерархической мозаики.

Одним из самых первых и знаменитых примеров самоподобных мозаик был построен английским физиком Роджером Пенроузом.



✓ Роджер Пенроуз
стоит на полу,
покрытом
мозаикой
Пенроуза.

«Все на одно лицо»

Теперь еще об одной особенности мозаик со строгой иерархией. Так как в этом случае восстановление мозаики каждого следующего уровня по предыдущему происходит вполне однозначно, то строгая иерархическая мозаика, например, как «стул», на первый взгляд, должна определяться однозначно. Однако, как раз наоборот, разных самоподобных мозаик, составленных из плиток «стул», бесконечно много. Более того, их даже несчетно много. Две (бесконечные) мозаики на плоскости считаются *одинаковыми*, если одну из них можно совместить с другой некоторым движением плоскости. В противном случае мозаики считаются разными.

Все строго иерархические мозаики из одной семьи, хотя в целом, т.е. глобально, отличаются друг от друга, локально выглядят как «близнецы-братья».

Явление самоподобия играет важную роль в современных областях математики, таких как динамические системы, фракталы, квазикристаллы.

Также есть еще и «Мозаики Конвея», которые я планирую изучать в дальнейшем.

В своей работе я рассмотрел самоподобные фигуры, ввел определение, рассмотрел свойства самоподобных фигур. Получение мозаик и виды мозаик.

Список литературы:

1. Журнал «Квант»
2. Л.Н Атанасян.
«Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику»
3. О.В. Мошуров, И.Г. Федин, М: Просвещение, 1997г.
«Толковый словарь математических терминов», М: Просвещение, 1965г.